

Дәріс 6.

Сигналдарды дискреттеу. Санақ теоремасы.

Сигналдарды дискреттеу — үздіксіз сигналдарды уақыт бойынша белгілі бір аралықтармен (дискреттермен) өлшеу немесе сандық сигналға айналдыру процесі. Бұл процесс сандық байланыс жүйелері мен цифрлық өңдеулердің негізі болып табылады.

Дискреттеу қадамдары:

1. Үздіксіз сигналды алу
2. Үлгілеу (сэмплирование)
3. Кванттау
4. Кодтау

Санақ теоремасы (Найквист – Котельников теоремасы)

Анықтамасы:

Егер үздіксіз сигналда ең жоғары жиілік $f_{\max}$ болса, онда осы сигналды ақпарат жоғалтпай дискреттеу үшін таңдау жиілігі f_d кем дегенде екі есе үлкен болуы тиіс:

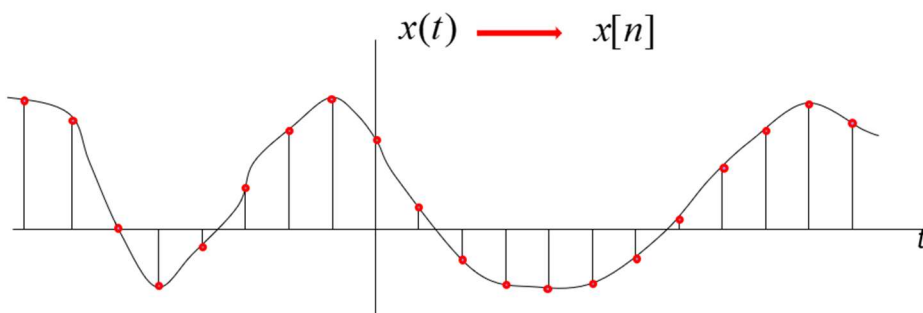
$$f_d \geq 2f_{\max}$$

Бұл шарт орындалмаса, алиасинг (жиілік жапсарласуы) деп аталатын құбылыс туындайды, нәтижесінде сигнал бұрмаланып беріледі.

Шектелген жолақты сигналдар

$$x \in L_2(-\infty, +\infty) \longrightarrow \begin{cases} X(f) \rightarrow 0 & f \rightarrow \pm\infty \\ x(t) \rightarrow 0 & t \rightarrow \pm\infty \end{cases}$$

Егер спектрлік тығыздық шекті болса $(-F_B, F_B)$



В.А. Котельников - 1933



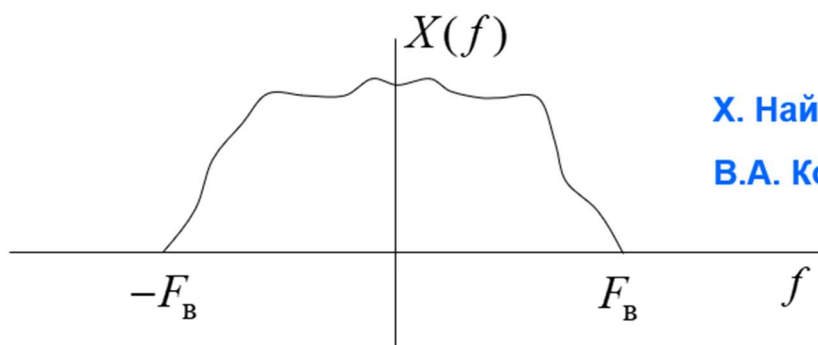
Х. Найквист - 1928



К. Шеннон - 1948



Санақ теоремасының ғалымдары



Х. Найквист - 1928

В.А. Котельников - 1933

К. Шеннон - 1948

Біз Фурье комплексті түрлендіруін қайта қарастырамыз

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j \frac{2\pi}{2F_B} kf},$$

$$C_k = \frac{1}{2F_B} \int_{-F_B}^{F_B} X(f) e^{-j \frac{2\pi}{2F_B} kf} df, \quad k = \overline{-\infty, \infty}$$

Сигналды мына түрде жазамыз

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_{-F_{\epsilon}}^{F_{\epsilon}} X(f) e^{j2\pi ft} df \\
 &= \int_{-F_{\epsilon}}^{F_{\epsilon}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{2F_{\epsilon}}kf} e^{j2\pi ft} df = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-F_{\epsilon}}^{F_{\epsilon}} e^{j2\pi f \left(t + k \frac{1}{2F_{\epsilon}} \right)} df = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-F_{\epsilon}}^{F_{\epsilon}} e^{j2\pi f \left(t + k \frac{1}{2F_{\epsilon}} \right)} df = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-F_{\epsilon}}^{F_{\epsilon}} \cos \left[2\pi f \left(t + k \frac{1}{2F_{\epsilon}} \right) \right] df = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot 2F_{\epsilon} \frac{\sin \left[2\pi F_{\epsilon} \left(t + k \frac{1}{2F_{\epsilon}} \right) \right]}{2\pi F_{\epsilon} \left(t + k \frac{1}{2F_{\epsilon}} \right)}
 \end{aligned}$$

Фурье қатарының коэффициенттері

$$C_k = \frac{1}{2F_{\epsilon}} \int_{-F_{\epsilon}}^{F_{\epsilon}} X(f) e^{-j\frac{2\pi}{2F_{\epsilon}}kf} df =$$

$$= \frac{1}{2F_6} \int_{-F_6}^{F_6} X(f) e^{j2\pi ft} df \bigg|_{t=-k \frac{1}{2F_6}} = \frac{x\left(-k \frac{1}{2F_6}\right)}{2F_6}$$

$$T_d = \frac{1}{2F_6} \quad \text{деп белгілесек}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-kT_d) \cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T_d}(t + kT_d)\right]}{\frac{\pi}{T_d}(t + kT_d)} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T_d}(t - nT_d)\right]}{\frac{\pi}{T_d}(t - nT_d)} \end{aligned}$$

Котельников санақ теоремасы

Сонымен

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T_d}(t - nT_d)\right]}{\frac{\pi}{T_d}(t - nT_d)} \quad T_d = \frac{1}{2F_6}$$

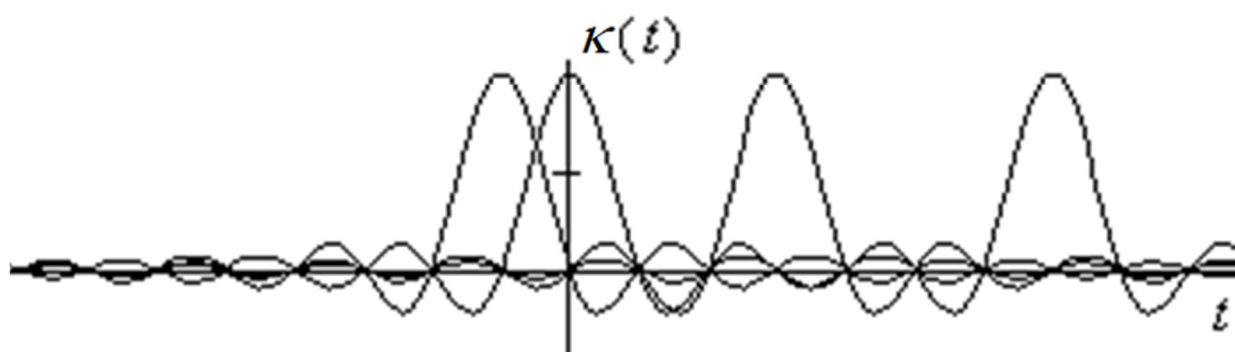
Базистік функциялар $\left\{ \kappa_n(t), n = \overline{-\infty, \infty} \right\}$

$$\kappa_0(t) = \sin\left(\frac{\pi}{T_d} t\right) \Bigg/ \left(\frac{\pi}{T_d} t\right)$$

$$\kappa_n(t) = \kappa_0(t - nT_d)$$

Нәтижесінде Котельников қатары және оның графикалық бейнесін аламыз.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T_d}(t - nT_d)\right]}{\frac{\pi}{T_d}(t - nT_d)}$$



Котельников базисі немесе қатары

Салыстырайық

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j \frac{2\pi}{2F_B} kf}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot 2F_B \frac{\sin \left[2\pi F_B \left(t + k \frac{1}{2F_B} \right) \right]}{2\pi F_B \left(t + k \frac{1}{2F_B} \right)}$$

Жалпыланған Рэлей формуласы бойынша

$$\left(\frac{\sin \left[2\pi F_B \left(t + k \frac{1}{2F_B} \right) \right]}{2\pi F_B \left(t + k \frac{1}{2F_B} \right)}, \frac{\sin \left[2\pi F_B \left(t + m \frac{1}{2F_B} \right) \right]}{2\pi F_B \left(t + m \frac{1}{2F_B} \right)} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2F_B} e^{j \frac{2\pi}{2F_B} kf}, \frac{1}{2F_B} e^{j \frac{2\pi}{2F_B} mf} \right)$$

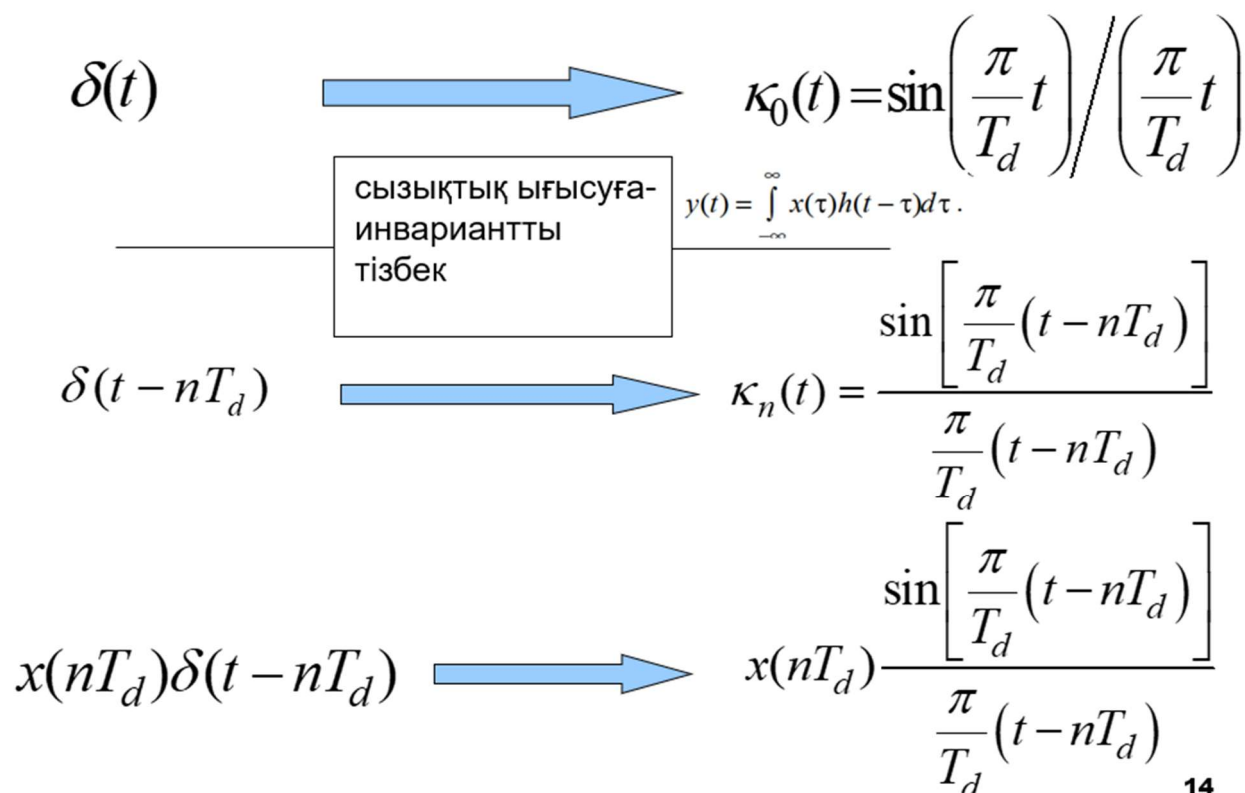
$$= \left(\frac{1}{2F_B} e^{j \frac{2\pi}{2F_B} kf}, \frac{1}{2F_B} e^{j \frac{2\pi}{2F_B} mf} \right) =$$

$$= \frac{1}{4F_B^2} \int_{-F_B}^{F_B} e^{j \frac{2\pi}{2F_B} (k-m) f} df = \frac{1}{2F_B} \delta_{km}$$

$$(\kappa_k, \kappa_m) = \frac{1}{4F_B^2} \int_{-F_B}^{F_B} e^{j \frac{2\pi}{2F_B} (k-m) f} df = \frac{1}{2F_B} \delta_{km}$$

Базис ортогональды нормаланбаған

Көрсеткіштерден аналогтық сигналды қалпына келтіру



n-бойынша қосынды алсақ

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \delta(t - nT_d)$$

СЫЗЫҚТЫҚ ҰҒЫСУҒА-
ИНВАРИАНТТЫ
ТІЗБЕК

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T_d}(t - nT_d)\right]}{\frac{\pi}{T_d}(t - nT_d)}$$

Котельников қатары

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \psi_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \frac{\sin(\pi f_d(t - k\Delta t))}{\pi f_d(t - k\Delta t)}$$

Спектрлік мағынада

Әсері (АИМ-сигнал)

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \delta(t - nT_d) = \\ &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_d) = x(t) \tilde{\delta}(t) \end{aligned}$$

где $\tilde{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_d)$



СЫЗЫҚТЫҚ ҰҒЫСУҒА-
ИНВАРИАНТТЫ
ТІЗБЕК

Көбейту теоремасы бойынша

$$v(t) = x(t)\tilde{\delta}(t) \longrightarrow V(f) = X(f) * \tilde{\Delta}(f)$$

$$\tilde{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j\frac{2\pi}{T_d}nt}$$

Фурье қатарының
коэффициенттері

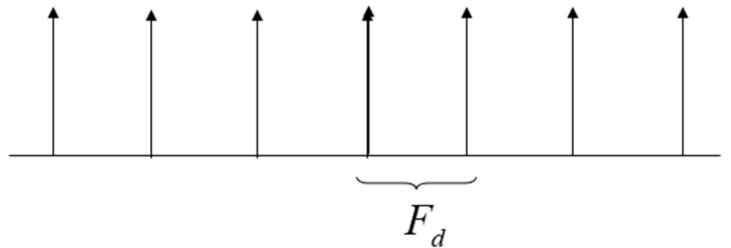
$$S_n = \frac{1}{T_d} \int_{-T_d/2}^{T_d/2} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_d}nt} dt = \frac{1}{T_d}$$

Сондықтан спектрлік тығыздық

$$\tilde{\Delta}(f) = \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_d}\right)$$

Спектрлік тығыздық

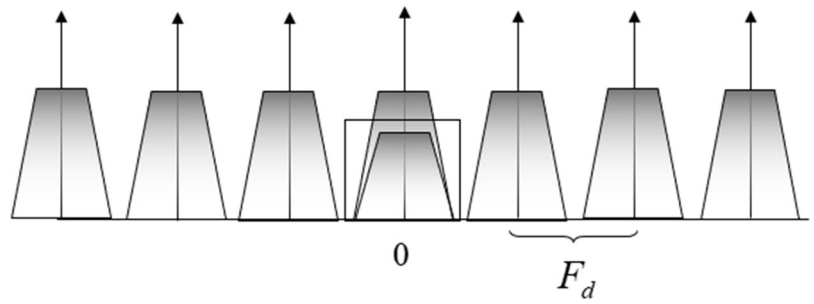
$$\tilde{\Delta}(f)$$



$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi) \tilde{\Delta}(f - \phi) d\phi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi) \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \phi - \frac{n}{T_d}\right) d\phi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi) \delta\left(f - \phi - \frac{n}{T_d}\right) d\phi \\
&= \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{n}{T_d}\right) = \\
&= \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nF_d)
\end{aligned}$$



Бақылау сұрақтары

1. Котельников базисі немесе қатары туралы жазыңыз
2. Котельников теоремасын жазып, мағынасын түсіндіріңіз
3. Дискреттелген сигналдың спектрі туралы жазыңыз
4. Аналогты-сандық түрлендіргіштің құрылымы туралы жазыңыз
5. Сандық -аналогты түрлендіргіш құрылғысы туралы жазыңыз
6. Қалпына келтіру сүзгісі және оның параметрлері
7. Дискретизатор құрылғысы туралы жазыңыз
8. Дискреттеу жиілігінің спектрге байланысы

Есептер:

1. Синусоидалық сигнал келесі түрде берілген: $x(t)=5\cos(100\pi t)$. Осы сигналды жоғалтусыз қалпына келтіру үшін қажетті ең аз дискреттеу жиілігін анықтаңыз.
2. $x(t)=\cos(200\pi t)$ сигналы 150 Гц жиілікте дискреттеледі. Спектрдің қабаттасуы бола ма?
3. Берілген сигнал:
 $x(t)=e^{(-2t)}$. Ол $T_d=0.1$ с периодымен дискреттеледі. Дискреттелген сигнал өрнегін жазыңыз.
4. Сигнал $x(t)=\sin(40\pi t)$ 50 Гц жиілікпен дискреттелді. Оны дәл қалпына келтіру үшін қажетті жиілікті табыңыз?
5. Берілген $x(t)=\cos(2\pi \cdot 300t)$ сигналы $f_d=400$ Гц жиілікпен дискреттеледі. Спектрлік компоненттердің жиіліктерін анықтаңыз.
6. 1500 Гц максималды жиілікті дискреттеу үшін қажетті ең аз дискреттеу периодын табыңыз
7. $x(t)=\cos(300\pi t)+\cos(600\pi t)$. Осы сигнал үшін минималды дискреттеу жиілігі.
8. Амплитудасы 2 В болатын сигнал 8-биттік кванттаумен (256 деңгей) дискреттеледі. Кванттау қадамы.
9. Үзіліссіз сигнал: $x(t)=3\sin[f_0](40\pi t)+2\cos[f_0](80\pi t)$. Бұл сигнал $T_d=0.01$ с периодымен дискреттеледі. Дискреттелген сигналдың өрнегі.
10. Сигнал $x(t)=\cos[f_0](2\pi \cdot 600t)$ 800 Гц жиілікпен дискреттеледі. Спектрде қандай жиіліктер пайда болады.